

La modélisation de l'actif dans le cadre d'un modèle interne.

Illustration numérique de l'impact du modèle d'actif pour un contrat d'épargne

Ateliers Actuariels Appliqués
<http://www.lesaaa.fr>
16 septembre 2008

Frédéric PLANCHET
Actuaire associé

Samuel CHARVET
Actuaire

Pierre THEROND
Actuaire

Sommaire

- 1. Présentation du modèle**
2. Le modèle actif-passif
3. Implémentation
4. Paramètres du calcul
5. Résultats

1. Présentation du modèle

On a montré dans des exemples simplifiés *infra* l'impact important du choix du modèle sur les résultats. L'illustration présentée ici se propose de comparer les résultats obtenus sur un contrat d'épargne pour :

- le calcul des provisions ;
- le calcul des MCR et SCR dans le modèle standard ;

dans les deux situations suivantes :

- l'actif risqué est décrit par un mouvement brownien géométrique (B&S) ;
- l'actif risqué est décrit par un processus de Merton.

L'application numérique est construite avec le logiciel Image, elle est présentée de manière détaillée dans la suite.

1. Présentation du modèle

Le contrat étudié au 31/12/2007 est un contrat d'épargne en € avec une garantie de taux. Ces caractéristiques sont les suivantes :

- Encours : 4 680 M€
- Nombre de polices : 27 051
- Taux garanti (moyen) : 2,5 %
- Taux de prélèvement sur épargne (moyen) : 0,5 %
- Age moyen à la date d'inventaire : 50 ans
- Distribution des bénéfices : 90 % des bénéfices techniques et 85 % des bénéfices financiers.

1. Présentation du modèle

L'actif admit en représentation est structuré de la manière suivante :

	Valeur de marché (m EUR)	% (Valeur de marché)
Obligations	3 801	75%
Actions	529	10%
Immobilier	893	8%
Monétaire	337	6%

On s'intéresse donc dans la suite à l'impact du choix du modèle d'actif pour les actions, soit 10 % de la valeur de marché à l'origine.

Sommaire

1. Présentation du modèle
- 2. Le modèle actif-passif**
3. Implémentation
4. Paramètres du calcul
5. Résultats

2. Le modèle actif-passif

Le modèle utilisé est un modèle « à scénarios » dont la logique générale de fonctionnement est la suivante :

- On simule 10 000 trajectoires d'actif et on calcule pour chacune de ces trajectoires le rendement cumulé au terme ;
 - on conserve la trajectoire moyenne associée à la médiane de cet indicateur, plus les 10 trajectoires moyennes pour les quantiles inférieurs et les 10 trajectoires moyennes pour les quantiles supérieurs, soit 21 trajectoires au total ;
 - on déroule alors 21 calculs déterministes selon la logique détaillée ci-après ;
 - on calcule les moyennes des valeurs de l'actif et du passif, ce qui fournit une estimation de la NAV pour chaque scénario du QIS 4 ;
 - sur cette base on calcule les SCR par risque que l'on agrège.

2. Le modèle actif-passif

Le calcul des SCR par risque repose sur plusieurs trajectoires d'actifs :

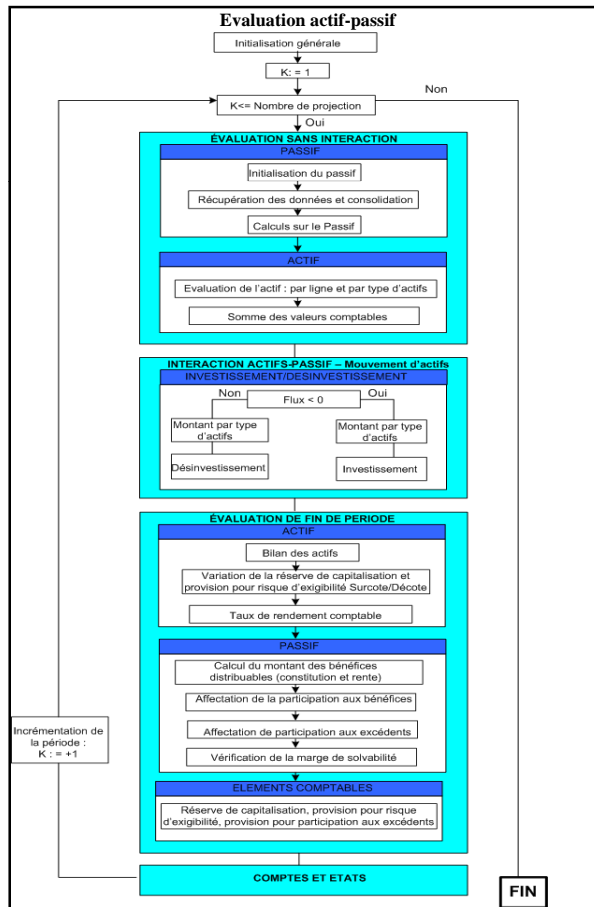
- Trajectoires de courbes des taux (modèle HJM)
 - Scénario central : 10 000 courbes de taux générées à partir de la courbe des taux swap ;
 - Scénario MktIntUp : 10 000 courbes de taux générées à partir de la courbe des taux swap stressée à la hausse ;
 - Scénario MktIntDown : 10 000 courbes de taux générées à partir de la courbe des taux swap stressée à la baisse.

- Trajectoires d'actions : 10 000 trajectoires générées selon le modèle de B&S puis selon le modèle de MERTON

- Trajectoires d'immobilier : 10 000 trajectoires générées selon le modèle de B&S

2. Le modèle actif-passif

2.1. Schéma global de simulation



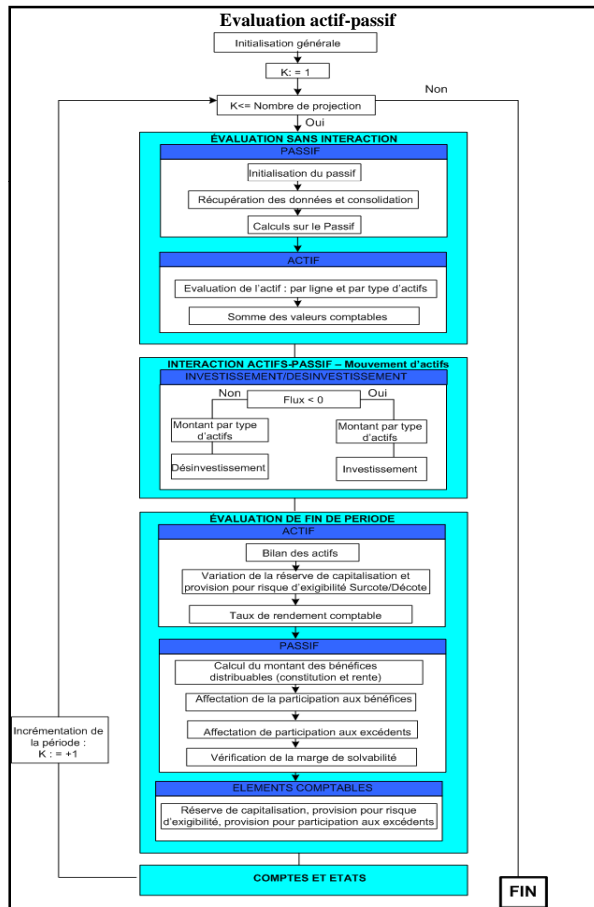
1. Évaluation sans interaction

Lors de cette étape, le passif et l'actif sont projetés ligne à ligne selon des hypothèses déterministes où sont projetés :

- Le passif selon des hypothèses de sortie (loi de rachat, table de mortalité), de frais, ...
- L'actif selon des scénarios d'évolutions (actions, immobilier) et de courbe de taux (obligations).

2. Le modèle actif-passif

2.1. Schéma global de simulation



2. Interaction Actif Passif

Des projections séparées de l'étape précédente est dégagé un flux de trésorerie qui est globalement la somme des éléments suivants :

+ Primes,

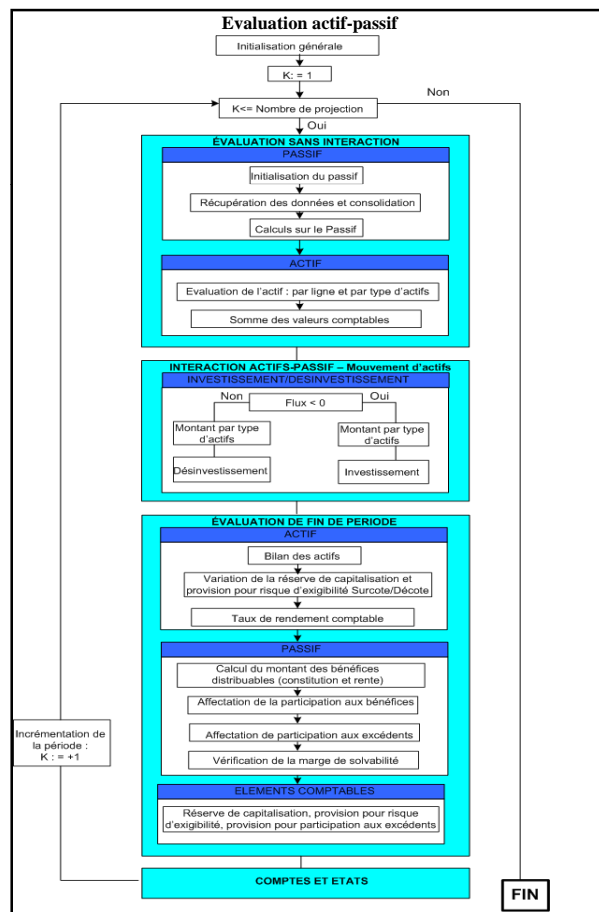
+ Cash financier (coupons, dividendes, ...),

- Prestations payées,

- Frais payés.

2. Le modèle actif-passif

2.1. Schéma global de simulation



2. Interaction Actif Passif

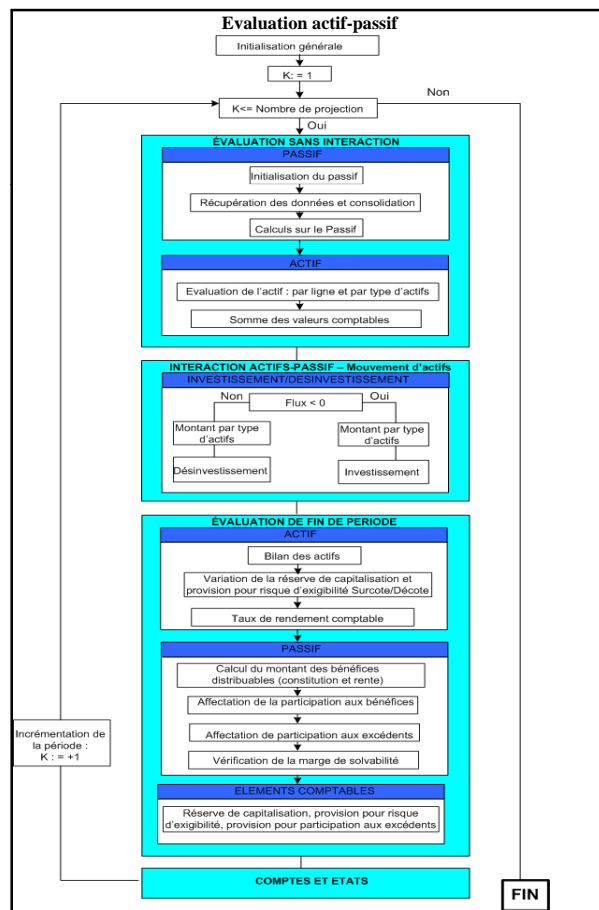
Ce flux est alors investi ou désinvesti selon son signe.

Ces mouvements d'actifs s'opèrent selon un modèle d'allocation cible :

- Donnée d'une allocation cible,
- les investissements et désinvestissements interviendront par la suite pour se rapprocher de cette allocation cible.

2. Le modèle actif-passif

2.1. Schéma global de simulation



3. Évaluation de fin de période

Cette étape consiste :

- à créer les états de reporting de la période (compte de résultats, bilan, états des actifs),
- à affecter la participation aux bénéficiaires.

2. Le modèle actif-passif

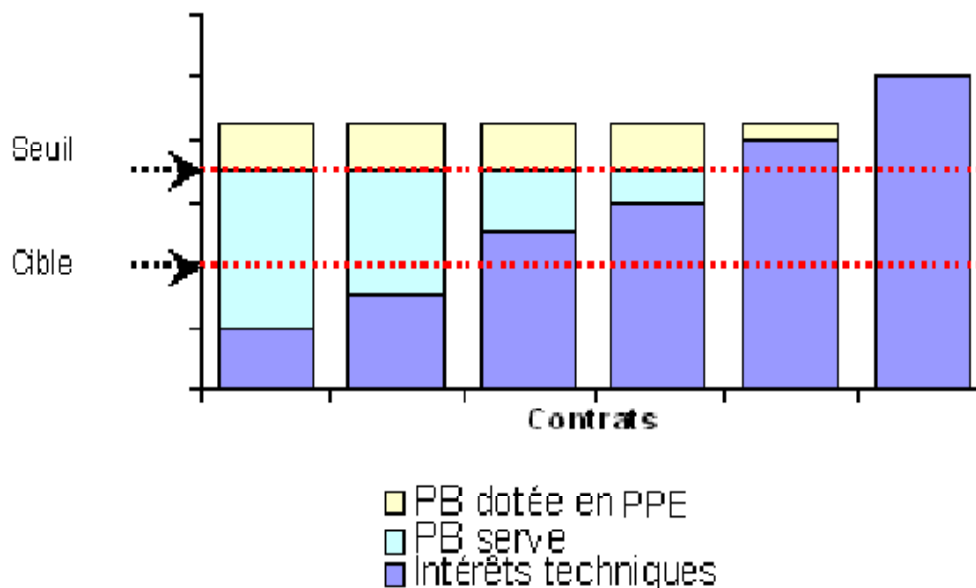
2.2. Pilotage de la PB

Il s'agit de modéliser le comportement de l'assureur en terme de politique de distribution des bénéfices. On définit deux taux de référence :

- Le taux cible de revalorisation : niveau de revalorisation souhaité par l'assureur. En pratique celui ci est indexé sur les taux longs. En cas de résultats insuffisants pour l'atteindre, la PPB est reprise.
- Le taux seuil de revalorisation : taux de revalorisation au-delà duquel la PPB est dotée.

2. Le modèle actif-passif

2.2. Pilotage de la PB



Le principe consiste ainsi à définir un tunnel de taux à l'aide duquel on lisse la distribution des bénéfices ; les résultats confortables d'une année compensent ceux trop faibles d'une autre année.

2. Le modèle actif-passif

2.3. Rachats conjoncturels

L'approche consiste à décomposer le rachat selon deux éléments :

- le "rachat structurel" indépendant de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance,
- le "rachat conjoncturel" dépendant de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance.

2. Le modèle actif-passif

2.3. Rachats conjoncturels

Le taux de rachat est ainsi modélisé comme une fonction croissante de l'écart de taux entre le taux de revalorisation cible de la période précédente et le taux de revalorisation effectif de la période précédente :

$$\tau(n) = \tau_{\text{str}}(n) \times \left[1 + \alpha \times (r_{\text{cible}}(n-1) - r_{\text{effectif}}(n-1)) \right]$$

où α représente la sensibilité du taux de rachat de la période n à l'écart entre le taux cible et le taux de revalorisation effectif sur la période précédente.

Sommaire

1. Présentation du modèle
2. Le modèle actif-passif
- 3. Implémentation**
4. Paramètres du calcul
5. Résultats

3. Implémentation

3.1. Le modèle de Black et Scholes

La modélisation s'opère dans l'univers risque neutre avec présence d'un taux de dividende :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) - q(t))dt + \sigma d\tilde{B}(t)$$

où $r(t)$ est le taux sans risque, $q(t)$ le taux de dividende et

$$d\tilde{B}(t) = dB(t) + \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma} dt$$

le brownien dans l'univers risque neutre obtenu par changement de probabilité.

3. Implémentation

3.1. Le modèle de Black et Scholes

Ce processus admet une discrétisation exacte (formule d'Itô) :

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \times \exp \left\{ \left(r(t_i) - q(t_i) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \times (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} \times \varepsilon_i \right\}$$

Le problème se réduit ainsi à la simulation d'une loi normale centrée réduite. Cette simulation est effectuée par inversion *via* l'algorithme de Moro.

3. Implémentation

3.2. Le modèle de Merton

La modélisation s'opère dans l'univers risque neutre pour la composante géométrique avec présence d'un taux de dividende et dans l'univers risque historique pour la composante à saut :

$$S(t) = S(0) \times \exp \left\{ \left(r(t) - q(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \times t + \sigma \tilde{B}_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\}$$

On suppose ainsi que le risque associé à la composante à saut est diversifiable.

3. Implémentation

3.2. Le modèle de Merton

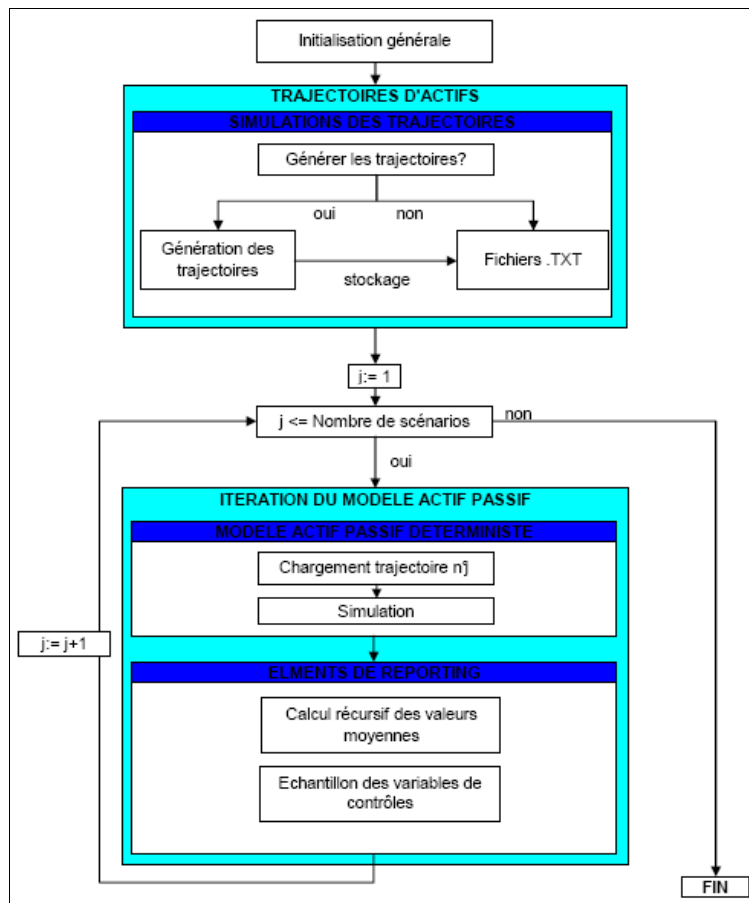
Ce processus admet une discrétisation exacte :

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \times \exp \left\{ \left(r(t_i) - q(t_i) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \times (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} \times \varepsilon_i + \sum_{k=1}^{N_i} U_k \right\}$$

Le problème se réduit ainsi à la simulation d'une loi normale et d'un processus de Poisson, ce qui ne pose pas de difficulté particulière.

3. Implémentation

3.3. Schéma global de simulation



Il s'agit d'utiliser le modèle Actif Passif déterministe :

- celui-ci sera ainsi alimenté par les scénarii d'actifs générés par des méthodes stochastiques,
- les simulations seront itérées sur chaque scénario.

Des états moyens sont édités (compte de résultat, bilan, état des actifs) et certains variables caractéristiques (taux de rendement, résultat, flux de trésorerie) sont stockés sous forme d'échantillon.

Sommaire

1. Présentation du modèle
2. Le modèle actif-passif
3. Implémentation
- 4. Paramètres du calcul**
5. Résultats

4. Paramètres du calcul

Modèle de Black & Scholes

- Volatilité : $\sigma = 20\%$
- Taux sans risque et taux de dividendes : issue de la courbe des taux swap

Modèle de Merton

- Volatilité : $\sigma = \sigma_U = 10\%$ la volatilité est partagée 50/50 entre les composantes géométrique et à saut.
- Intensité du processus de Poisson : $\lambda = 1$
- Taux sans risque et taux de dividendes : issue de la courbe des taux swap.

4. Paramètres du calcul

Hypothèses financières

La simulation s'opère en supposant que la répartition entre les classes d'actif est pérenne avec l'allocation cible initiale suivante :

	% (Valeur de marché)
Obligations	75%
Actions	10%
Immobilier	8%
Monétaire	6%

4. Paramètres du calcul

Modèle de pilotage de la PB

- Taux cible de revalorisation : il est calé chaque année sur la valeur du taux long (10 ans) issue de la simulation en cours ;
- Taux seuil de revalorisation : il est défini comme supérieur de 50 points de base au taux cible :

$$r_{seuil}(n) = r_{cible}(n) + 0,50$$

4. Paramètres du calcul

Modèle de rachats dynamiques

Il s'agit de déterminer la sensibilité du taux de rachat de la période n à l'écart entre le taux cible et le taux de revalorisation effectif sur la période, α .

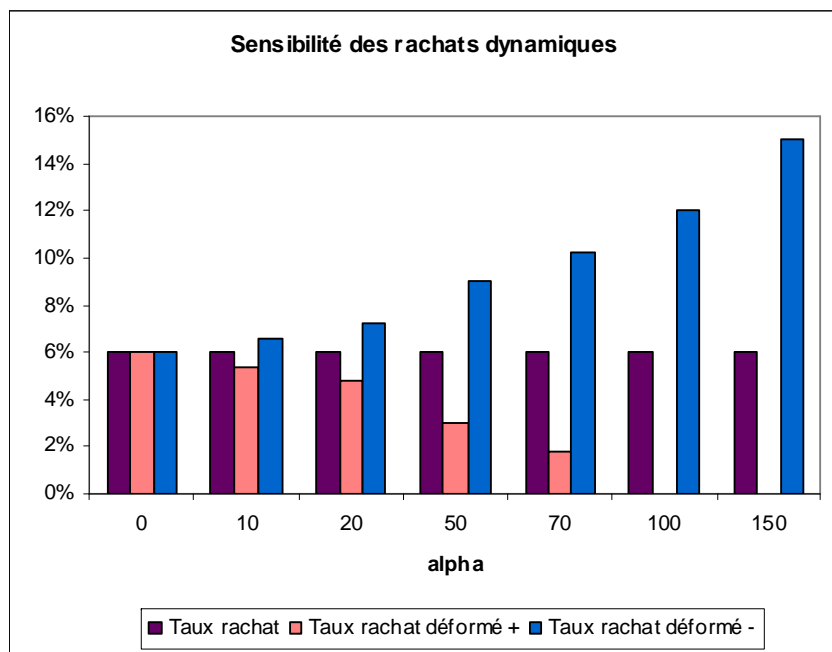
Ce coefficient est très délicat à paramétrer. En effet, disposer de données permettant son approximation est difficile.

L'idée est donc de retenir une valeur qui permette d'atteindre des déformations réalistes proche de que l'on peut attendre *a priori*.

4. Paramètres du calcul

Modèle de rachats dynamiques

On constate une moyenne de l'écart taux cible / et taux de rendement de l'ordre de $0,98\% \approx 1\%$



- Taux de rachat : 6%
- Taux cible : 5%
- Taux effectif '+' : $5\% + 1\% = 6\%$
- Taux effectif '-' : $5\% - 1\% = 4\%$

$$\alpha = 70$$

Sommaire

1. Présentation du modèle
2. Le modèle actif-passif
3. Implémentation
4. Paramètres du calcul
- 5. Résultats**

5. Résultats

Provisions techniques

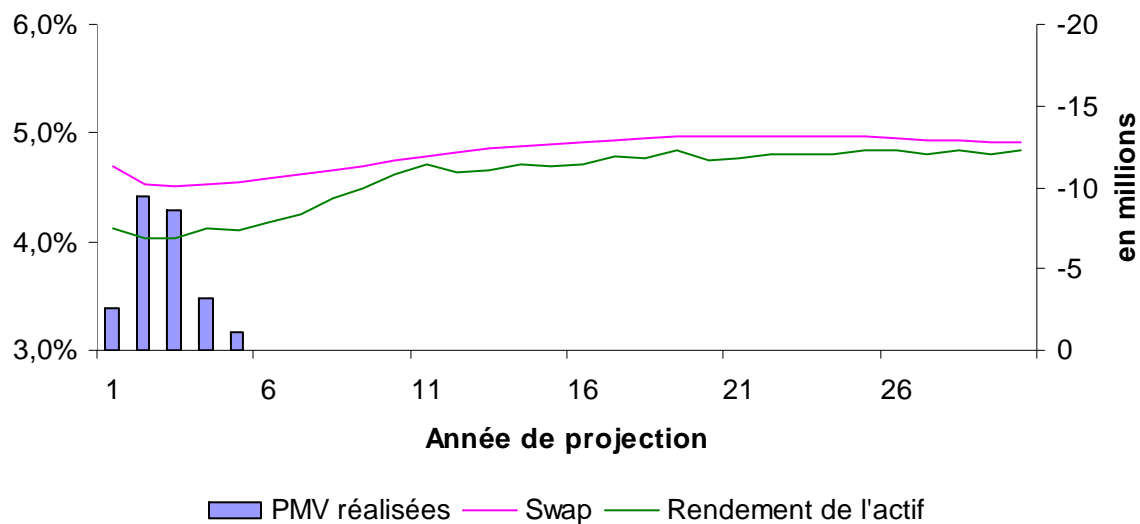
- Provisions Solvabilité 1 : 4,68 Md€
- Provisions « best estimate » (QIS 4) :
 - B&S : 4,20 Md€
 - Merton : 4,26 Md€

On observe une baisse d'environ 10 % des provisions entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2. Cette situation est atypique (+ 4 % en moyenne pour les contrats d'épargne dans le QIS 3) et s'explique par la présence de moins value dans l'actif :

5. Résultats

Provisions techniques

Rendement, actualisation



Le choix du modèle d'actif a peu d'impact (de l'ordre de 1,5 %).

5. Résultats

Provisions techniques

La transition de Solvabilité 1 vers Solvabilité 2 peut être décomposée de la manière suivante :

- Provisions S1 (vision rétrospective) : 4,7 Md€
- Provisions S2 du contrat « nu » (sans option ni garantie) : 3,48 Md€
- Effet des options et garanties : 0,72 Md€
- Provisions « best estimate » (QIS 4) : 4,20 Md€

La baisse du montant des provisions de S1 vers S2 « nu » s'explique par l'introduction de l'actualisation mis en regard avec le rendement de l'actif : la liquidation des moins values en début de projection impacte à la baisse le niveau de revalorisation et donc le BE.

5. Résultats

Besoin en capital

- Marge de solvabilité Solvabilité 1 (4 % des PT) : 187 M€
- MCR (QIS 4 / 3,5 % des PT dans cet exemple simple) :
 - B&S : 141 M€
 - Merton : 140 M€
- SCR (QIS 4) :
 - B&S : 847 M€
 - Merton : 939 M€ (+ 10 %)

Les montants de SCR sont en pratique obtenus en agrégeant les SCR par risque :

5. Résultats

Besoin en capital (B&S)

En m€	Actifs en représentation des engagements	Passifs (hors Risk margin)	NAV	Variation NAV	
Scénario central	4 958	4 196	762		Sans Objet
Scénario MktIntUp	4 629	4 506	123	-639	
Scénario MktIntDown	5 125	3 916	1 209	447	
Scénario MktInt				-639	
Scénario MktEq	4 791	4 146	645	-117	
Scénario MktProp	4 958	4 196	762	0	SCRMkt 650
Scénario LifeMort	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	-5	
Scénario LifeLapseUp	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	-170	
Scénario LifeLapseDown	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	0	
Scénario LifeLapseMass	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	-467	
Scénario LifeLapse				-467	
Scénario LifeDep	4 958	4 211	747	-15	
Scénario LifeCat	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	0	SCRLife 467
					SCR 847

5. Résultats

Besoin en capital (MERTON)

En m€	Actifs en représentation des engagements	Passifs (hors Risk margin)	NAV	Variation NAV	
Scénario central	4 837	4 262	576	s.o.	
Scénario MktIntUp	4 441	4 560	-119	-694	
Scénario MktIntDown	5 225	3 877	1 348	772	
Scénario MktInt				-694	
Scénario MktEq	4 448	4 227	221	-355	
Scénario MktProp	4 837	4 262	576	0	SCRmkt 780
Scénario LifeMort	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	-6	
Scénario LifeLapseUp	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	-198	
Scénario LifeLapseDown	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	0	
Scénario LifeLapseMass	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	-435	
Scénario LifeLapse				-435	
Scénario LifeDep	4 837	4 277	560	-15	
Scénario LifeCat	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	Variation de Best Estimate	0	SCRLife 436
					SCR 939

5. Résultats

Besoin en capital

- Les montants de MCR (proches dans les 2 modèles d'actif puisque dépendant des BE eux-mêmes peu différents) sont peu éloignés de la marge de solvabilité ;
- Le choix d'un modèle d'actif est un paramètre sensible, puisque le SCR augmente d'environ 10 % en passant de B&S à Merton.

NB : le SCR est sensible au choix de modèle utilisé fondamentalement pour le calcul des BE dans le QIS 4, alors même qu'on ne se situe pas ici dans une logique de modèle interne.

Au global on obtient une situation relativement homogène :

5. Résultats

Besoin en capital

Compte tenu de ces éléments, on obtient le comparatif suivant :

	Provisions techniques	Fonds propres (EMS ou SCR)	Total	Valeur de l'actif	Surplus	Couverture
Solvabilité 1	4 680	187	4 700	5 200	333	2,8
Solvabilité 2 B&S	4 196	847	5 043	5 560	517	1,6
Solvabilité 2 Merton	4 262	939	5 201	5 560	359	1,4

NB : en S1 la comptabilisation de l'actif est en valeur d'acquisition et les provisions annexes (PRE, réserve de capitalisation) sont initialement à 0.

Dans cet exemple, le surplus augmente de 55 % en passant à Solvabilité 2 avec B&S et reste à peu près stable avec Merton. Mais le ratio de couverture se dégrade progressivement de S1 à S2 / B&S puis S2 / Merton.

5. Résultats

Temps de simulation

- 10 393 lignes de polices : 4h sur 21 scénarios
- L'approche actif / passif dynamique complète n'est pas envisageable, sauf à raisonner sur des lignes de passif fortement agrégées, agrégation qui souvent ne permettent pas de réduire suffisamment les temps de calculs
- Une approche alternative peut être envisagée : l'idée est d'utiliser un scénario central ; celui-ci constitue alors un input (primes, prestations, provisions) à un modèle qui déforme ces flux en fonction de chaque scénario d'actif simulé par ailleurs.

Conclusion

On peut noter que le modèle standard permet de mettre en évidence cet effet de manière sensible.

De ce fait, la réflexion sur le modèle d'actif à retenir dépasse le seul cadre du modèle interne et s'impose également pour le modèle standard.

Dans ce contexte le choix du modèle d'actif, si il impacte peu la taille totale du bilan, a une incidence sur la répartition du passif entre provisions et fonds propres.