La modélisation de l'actif dans le cadre d'un modèle interne.

Modéliser un actif risqué : mise en perspective.

Ateliers Actuariels Appliqués
http://www.lesaaa.fr
16 septembre 2008

Frédéric PLANCHET
Actuaire associé

Samuel CHARVET
Actuaire

Pierre THEROND
Actuaire

Programme

1- Modéliser un actif risqué : mise en perspective - Frédéric PLANCHET

2- Les conséquences sur le niveau du SCR – Pierre THEROND

3- Illustration numérique de l'impact du modèle d'actif pour un contrat d'épargne – Samuel CHARVET

Préambule

La mise en œuvre de Solvabilité 2 d'une part et de la norme IFRS assurance d'autre part nécessite de recourir à des modèles stochastiques pour l'actif pour (au moins) les deux problématiques suivantes :

- ❑ Le calcul des provisions techniques, au travers de l'évaluation des options et la mise en place des couvertures associées ;

- ❑ La détermination du SCR (Solvabilité 2) *via* un critère de probabilité de ruine (*VaR* sur un quantile « élevé »).

Les modèles standards (Black & Scholes notamment) constituent des approximations trop grossières des comportements des actifs risqués dans ce contexte.

Préambule

Leurs limitations les plus pénalisantes sont :

- La sous-estimation des situations de baisse brutale du rendement ;
- L'hypothèse de complétude sous-jacente, qui n'est pas vérifiée en pratique.

Dans la suite de cette présentation on quantifie l'impact de ces imperfections sur les valeurs cible et on propose des modélisations mieux adaptées dans le contexte de l'assurance.

Sommaire

1. Introduction

1.1. Contexte et notations

On considère dans la suite un actif risqué dont le prix à la date t est noté $S(t)$

En pratique on observe les prix à des dates discrètes $t_1, \ldots, t_n$ et on observe le rendement du titre entre chaque date :

$$x_i = x(t_i) = \mathbf{ln} \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$$

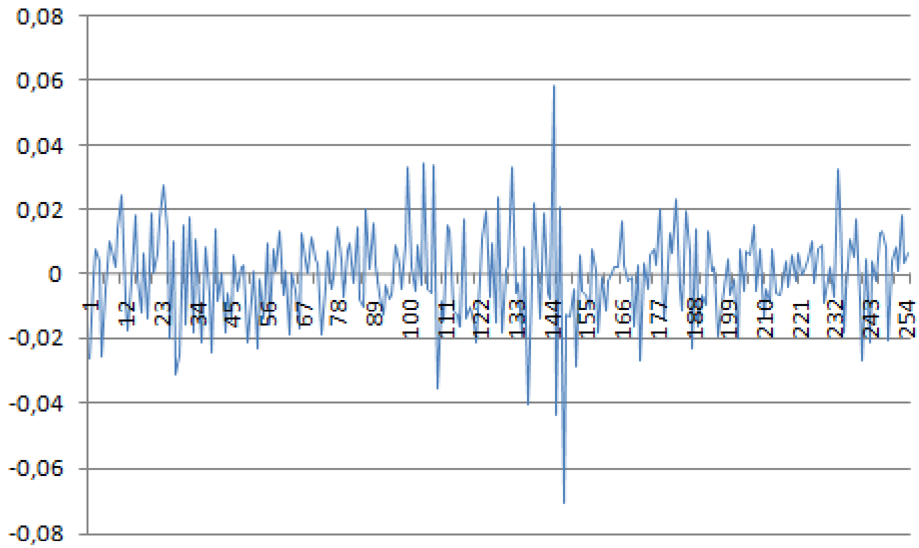
La plupart des modèles d'actif conduisent à ce que ces valeurs soient indépendantes et identiquement distribuées, ce qui facilite l'estimation des paramètres et les calculs de prix.

L'hypothèse la plus courante sur la loi de *X* est qu'il s'agit d'une variable gaussienne, ce qui conduit au modèle de B&S.

1. Introduction

1.2. Quelques observations

On observe le rendement quotidien du CAC 40 du 20/08/2007 au 19/08/2008 (255 jours de bourse) :



$$x_i = x(t_i) = \mathbf{ln}\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$$

	Quotidien	Annuel
Moyenne	-0,00083698	-0,21342931
Volatilité	0,01455612	0,23244259
kurtosis (aplatissement)	2,61222879	
Asymétrie	-0,24568366	
		Nombre de valeurs
Probabilité seuil	1,0%	2,55
Seuil supérieur	0,03302562	5
Seuil inférieur	-0,03302562	4

Cette distribution n'est pas gaussienne :

1. Introduction

1.2. Quelques observations

Rappels :

- coefficient d'asymétrie (skewness) :

$$\gamma_1 = \frac{E\left(X-\mu\right)^3}{\sigma^3}$$

- coefficient d'aplatissement (kurtosis) :

$$\beta_2 = \frac{E\left(X-\mu\right)^4}{\sigma^4}$$

Pour une loi normale, l'asymétrie est nulle et l'aplatissement vaut 3. Cela permet de se faire une idée de la normalité d'un échantillon.

NB : le logiciel R propose plusieurs tests de (non) normalité dans les packages *nortest* et *tseries*.

1. Introduction

1.2. Quelques observations

On peut alors chercher à modifier le modèle pour tenir compte de ces informations. Plusieurs approches sont possibles.

On observe que dans le modèle de B&S on a :

$$\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h+\sigma\left(B_{t+h}-B_t\right)$$

et une idée est d'ajouter une composante venant « perturber » le rendement de la manière suivante :

$$\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h+\sigma\left(B_{t+h}-B_t\right)+\sum_{N_t}^{N_{t+h}}U_i$$

avec *N* un processus de Poisson et *U* une suite de sauts gaussiens. Il s'agit du modèle de Merton, qui généralise B&S et sera détaillé plus loin.

1. Introduction

1.2. Quelques observations

Comment se positionne le QIS 4 dans ce contexte ?

Dans le QIS 4, le choc à la baisse sur les actions est de 32 %. Avec le CAC 40, ce choc correspond à une probabilité de survenance de :

- période 03/1990-08/2008 : 4 % (rendement moyen de 4,7 %, volatilité de 21 %)
- période 08/2007-08/2008 : 33 % (rendement moyen de -21 %, volatilité de 23 %)...

On peut donc noter que :

- Le QIS 4 est calibré sur des durées longues ;
- sur presque 20 ans, on reste loin du quantile à 99,5 %.

1. Introduction

1.2. Quelques observations

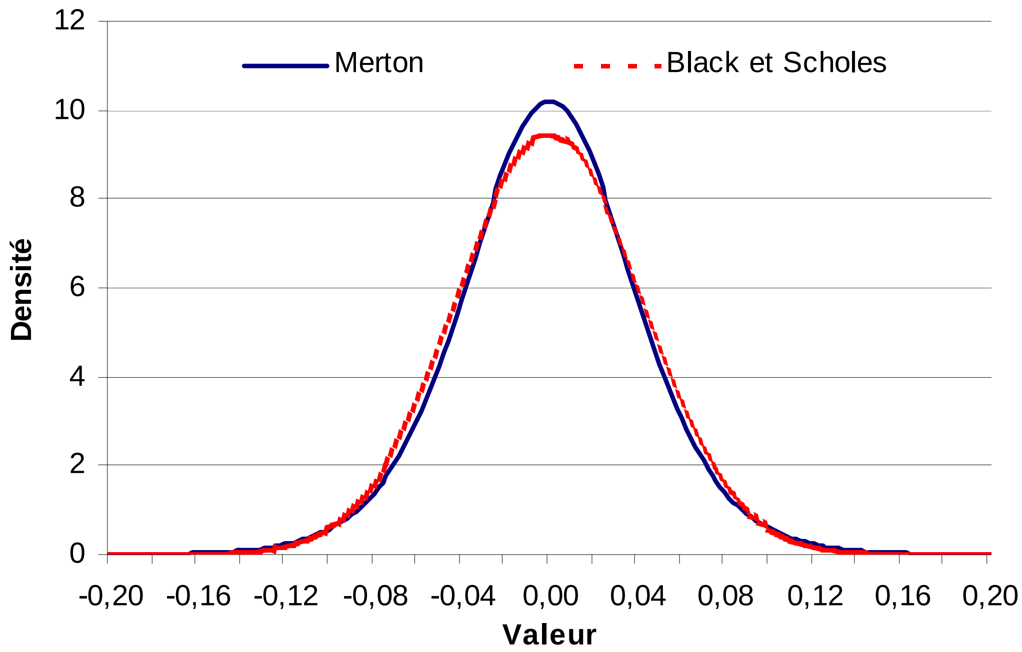
Ces observations sont directement issues des données et dépendent donc peu du choix de modèle d’actif qui sera retenu.

De plus, dans le cadre d’un modèle interne, la référence au quantile à 99,5 % calibré sur des données de marché risque de conduire à un besoin en capital sensiblement supérieur à celui issu du QIS 4, dont on vient de voir qu’il est du niveau du quantile à 96 % pour le CAC 40 sur les 18 dernières années.

1. Introduction

1.2. Quelques observations

On considère maintenant le titre Alcatel observé du 25/06/2002 au 21/01/2005 (659 jours) et on compare les deux modélisations du rendement décrites précédemment :



50 % de la volatilité vient de la composante à sauts

(rendement espéré 5 %, volatilité 45 %)

	Moment estimators	Likelihood estimators
μ	0,00067364	0,00060628
σ^2	0,03095012	0,02785511
λ	0,99328746	0,89395872
σ_u^2	0,02884728	0,03173200

1. Introduction

1.2. Quelques observations

On peut noter sur le graphe précédent le fait que là encore l'aplatissement dans le modèle de Merton est plus faible que pour une loi normale (kurtosis normalisée > 0), signe de l'existence de queues de distributions plus épaisses.

Au surplus, dans le modèle de Merton le rendement est impacté par deux sources d'aléa : il ne sera donc pas possible de couvrir une position avec un seul actif, ce qui en d'autres termes signifie que le marché est devenu incomplet.

Les conséquences pratiques de ces remarques sont illustrées ci-après par des exemples.

1. Introduction

1.3. L'impact sur le SCR

On considère une société d'assurance qui doit faire face à l'horizon d'un an à un passif qui vaudra, de manière certaine, 100. Pour cela elle dispose d'un capital initial qu'elle investit dans un actif risqué.

L'assureur cherche le niveau de capital à détenir pour pouvoir faire face à son engagement avec une probabilité suffisante, par exemple de 1 %. Elle retient pour les calculs un modèle de Merton (dont on rappelle que B&S est un cas particulier).

Il s'agit donc de déterminer le montant du capital cible γ tel que :

$$\mathbf{Pr}\left[(100+\gamma)\mathbf{exp}\left\{\mu-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma B_1+\sum_{k=1}^{N_1} U_k\right\}\leq 100\right]\leq 0{,}01$$

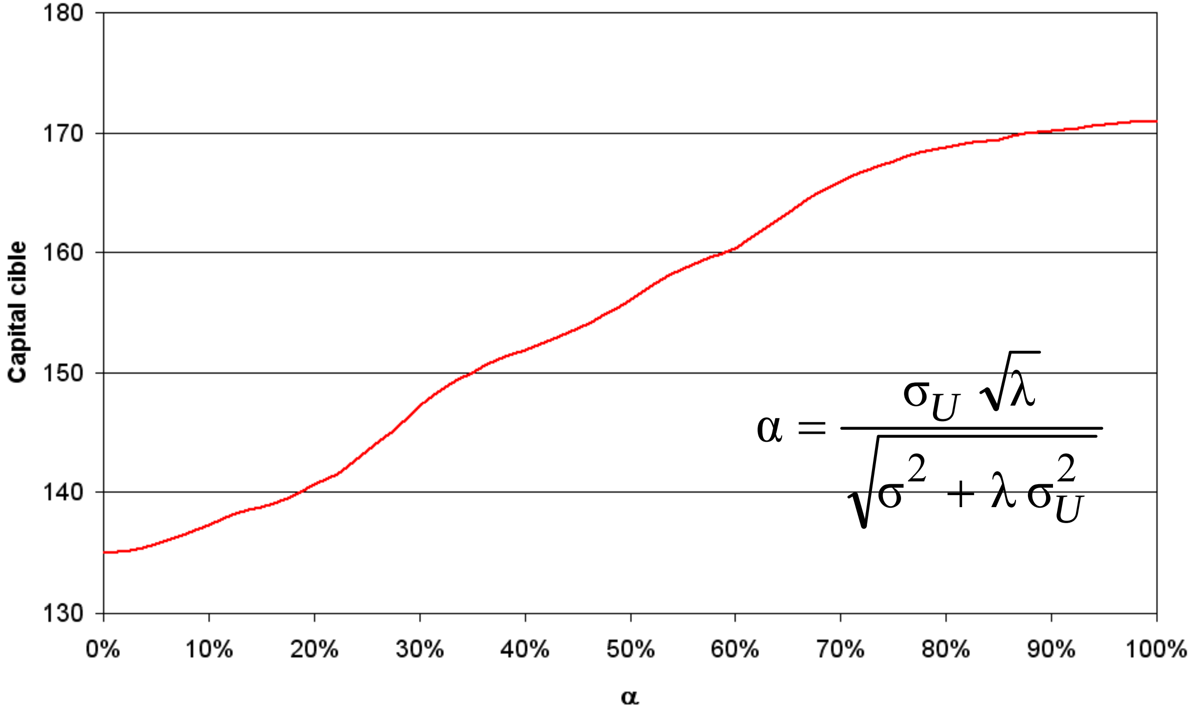
1. Introduction

1.3. L'impact sur le SCR

On cherche à voir comment varie le capital en fonction de l'importance de la composante à sauts dans le rendement. Avec les paramètres suivants :

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} = \ln 0{,}08 \qquad \lambda = 1{,}5 \qquad \sigma^2 + \lambda\sigma_U^2 = 0{,}16$$

On trouve :



1. Introduction

1.3. L'impact sur le SCR

A volatilité du sous-jacent fixé, le montant de capital à immobiliser au-delà du *best estimate* passe d'environ 35 % de la provision dans le cas de B&S à 55 % pour une part de volatilité de 50 % pour la composante à sauts (ce qui est ce que l'on constate en pratique), soit une augmentation de 57 %...

Le choix du modèle est donc déterminant pour une appréciation du risque qui ne soit pas sous-estimée.

NB : l'adéquation du modèle de Merton aux données ne peut être que meilleure que celle de B&S qui en est un cas particulier.

1. Introduction

1.4. L'impact sur les provisions techniques

Afin d'illustrer sur un cas simplifié l'impact du choix du modèle d'actif sur le niveau des provisions, on s'intéresse à la valorisation d'une option d'achat européenne avec d'une part le modèle classique de B&S et d'autre part le modèle de Merton.

Dans le cas du modèle de Merton la mesure martingale n'est plus unique et le marché est donc en situation d'incomplétude. Différentes approches peuvent être retenues pour justifier le choix de la mesure utilisée pour tarifer l'option.

On retient ici la solution initiale de Merton consistant à considérer que le risque associé à la composante à sauts est non systématique (propre au titre) et donc diversifiable : on ne lui associe pas de prime de risque. Cela conduit donc à évaluer l'espérance des flux associés.

1. Introduction

1.4. L'impact sur les provisions techniques

Pour réaliser la comparaison on fixe arbitrairement λ=1 et on contraint la volatilité globale à être égale dans les 2 modèles :

$$\sigma_{BS}^2 = \sigma^2 + \lambda \sigma_u^2$$

Pour l'exemple on prend une volatilité de 25 % ; dans le modèle de Merton on considère de la volatilité de la composante systématique est de 15 % et celle de la composante diversifiable de 20 %. On considère un titre coté 100 à l'origine, le prix d'exercice est égal à 110 et la maturité de l'option est T=1.

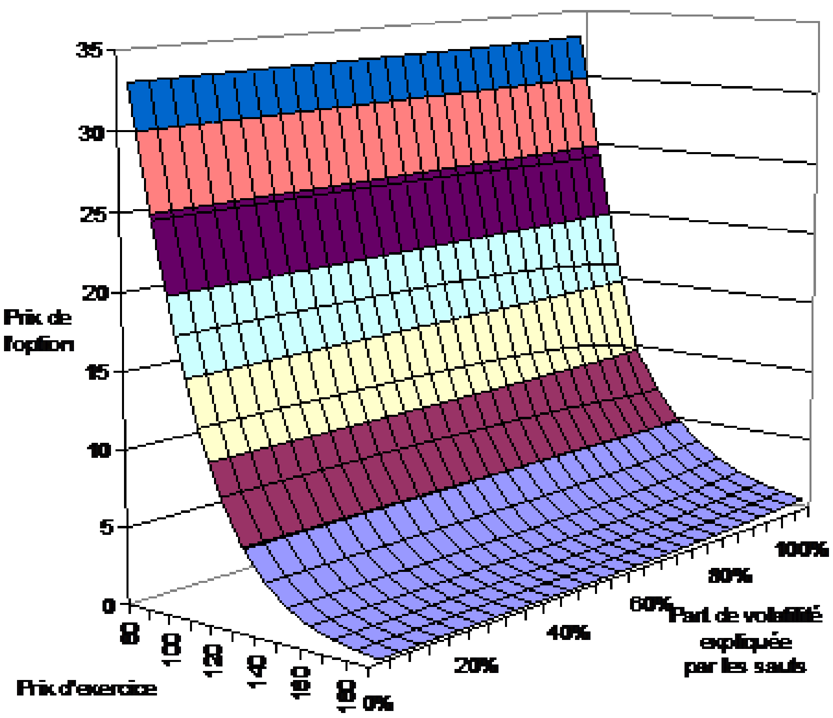
On trouve que le prix de l'option est par contre de 9,15 dans le modèle de Black et Scholes et de seulement 5,20 dans le modèle de Merton.

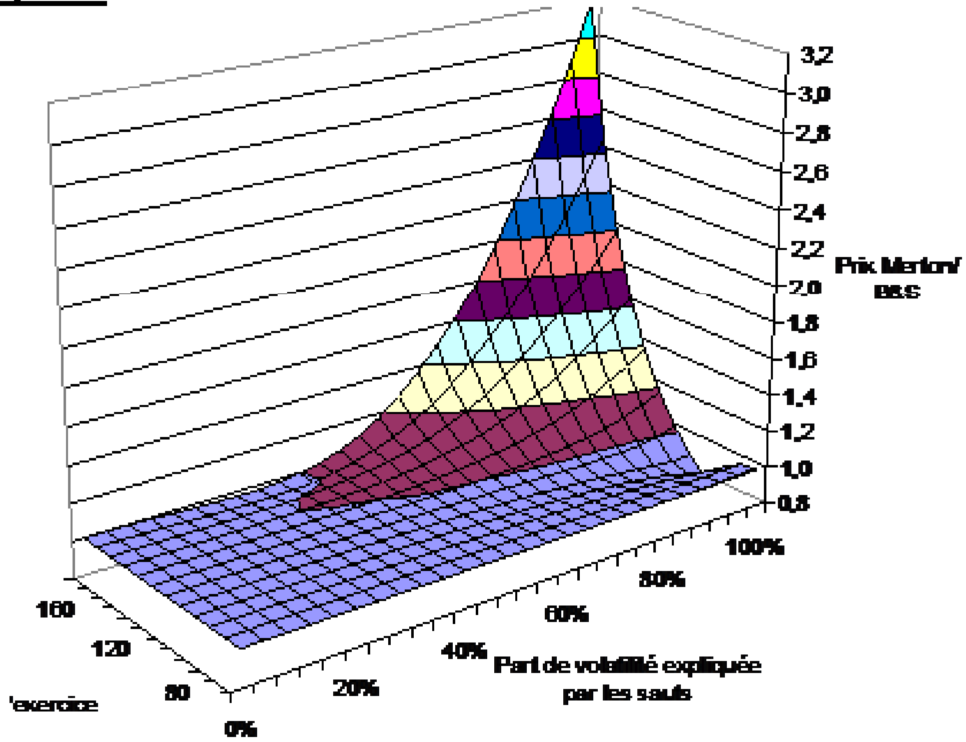
Là encore l'impact est très important.

1. Introduction

1.4. L'impact sur les provisions techniques

On a plus généralement :





L'effet est donc très variable selon la configuration des paramètres.

Sommaire

2. Modèles alternatifs à B&S

2.1. Introduction

L'observation des données comme l'analyse du comportement des investisseurs conduit à retenir que les variations de rendement d'un actif risqué présentent un caractère risqué plus important que la loi gaussienne.

Il faut donc en tirer les conséquences en terme de modèle.

La littérature sur le sujet est abondante et aucun modèle ne peut prétendre être universel, il est la résultante d'un compromis entre :

- la capacité à représenter correctement les données en vue d'une application donnée ;
- la capacité à faire des calculs ;
- la capacité à estimer les paramètres de manière efficace (dans les univers historique et risque-neutre).

2. Modèles alternatifs à B&S

2.1. Introduction

Pour ce qui concerne la capacité à effectuer les calculs, on doit considérer deux contextes différents :

- provisions sur des contrats avec des options financières : on doit calculer des prix d'options et des règles opérationnelles de couverture (en probabilité risque-neutre).

- calcul de SCR : on doit calculer un quantile de la distribution de la valeur de l'actif projeté à un an (en probabilité historique)

On présente dans la suite certains de ces modèles. La complexité technique d'une description formelle est souvent importante, ces aspects ne sont pas abordés ici.

2. Modèles alternatifs à B&S

2.2. Modèle de Heston (1973)

Il s'agit d'une généralisation « naturelle » de B&S dans laquelle la volatilité est rendue aléatoire :

$$dS(t) = \mu dt + \sqrt{V(t)}dB_1(t)$$
$$dV(t) = a(\theta - V(t))dt + b\sqrt{V(t)}dB_2(t)$$

les mouvements browniens étant corrélés : $d\langle B_1, B_2 \rangle_t = \rho dt$.

Les prix d'options peuvent être calculés « explicitement », via une intégrale.

2. Modèles alternatifs à B&S

2.3. Modèle de Merton (1976)

Il s'agit d'une autre généralisation « naturelle » de B&S dans laquelle une composante à sauts est ajoutée à la composante brownienne :

$$S(t) = S(0)\,\mathbf{exp}\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\}$$

avec *B* un mouvement brownien, *N* un processus de Poisson homogène d'intensité λ et $U = (U_k)_{(k\geq 1)}$ une suite de variables gaussiennes centrées et de variance σ_u^2 .

2. Modèles alternatifs à B&S

2.4. Processus de Lévy

Le mouvement brownien géométrique et le processus de Merton sont en fait des cas particuliers d'une classe de processus plus générale appelée processus de Lévy.

De récentes études ont mis en évidence l'intérêt d'une classe particulière de processus de Lévy, les processus CGYM. Proposé dans CARR et al. [2002], ces processus sont une généralisation des processus variance-gamma. Le processus CGYM défini par la densité de Lévy :

$$\nu(x) = \begin{cases} C\dfrac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x < 0 \\ C\dfrac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x < 0 \end{cases}$$

2. Modèles alternatifs à B&S

2.5. Processus « regime switching » de Hardy (2001)

Pour terminer ce panorama on peut citer l'approche proposée par Marie Hardy combinant deux processus de B&S, l'un pour le « régime normal » et l'autre pour les « régimes de crise » :

$$\ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right)\Big|\rho_t \sim N\left(\mu_{\rho_t}, \sigma^2_{\rho_t}\right)$$

en supposant que la processus d'état est une chaine de Markov à 2 états de probabilités de transition :

$$\pi_{i,j} = \mathbf{Pr}\left(\rho_t = i \middle| \rho_{t-1} = j\right) \qquad i, j = 1, 2$$

Ce modèle présente l'avantage de fournir des formules explicites pour les options, la couverture et les quantiles. De plus son estimation est simple.

Conclusion

On peut retenir les éléments suivants :

- l'hypothèse de rendements gaussiens sous-jacente au modèle usuel de B&S est contredite empiriquement ; ceci est connu depuis longtemps (1960), mais était peu pénalisant jusqu'alors.

- en effet, dès lors que l'on s'intéresse à des résultats « en moyenne » (comme le « best estimate »), le choix du modèle d'actif à volatilité fixée n'a d'impact qu'à la marge.

- mais l'introduction d'une référence à une probabilité de ruine dans Solvabilité 2 conduit à réexaminer cette hypothèse qui peut conduire à sous-estimer le besoin en capital, du fait du comportement différent des quantiles élevés.

Références bibliographiques

BLACK F., SCHOLES M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities ». Journal of political Economy, vol. 81, n°3, 637–654.

CARR P., GEMAN H., MADAN D.B., YOR M. [2002] « The fine structure of asset returns: an empirical investigation ». Journal of business, vol. 75, n°2.

D'ESTAMPES L. [2003] *Traitement statistique des processus alpha-stables*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

DACUNHA-CASTELLE D., DUFLO M. [1982] *Probabilités et statistiques : problèmes à temps fixe*, Paris : Masson.

DRITSCHEL M., PROTTER Ph. [1999] « Complete markets with discontinuous security price » Finance and Stochastics, vol. 3, 203-214.

FAMA E.F. [1965] « The behavior of stock market price ». Journal of business, vol. 38, 34–195.

FAMA E.F., ROLL R. [1971] « Parameter estimates for symmetric stable distributions ». Journal of American Statistical Association, vol. 66, 331–336.

GABRIEL F., SOURLAS P. [2006] « Couverture d'options en présence de sauts ». Mémoire ENSAE

GERBER H.U., SHIU E.S. [1995] « Option pricing by Esscher transforms ». Insurance: Mathematics and Economics, Volume 16, Number 3, pp. 287-287(1)

HARDY M. [2001] « A regime switching model of long-term stock returns », North American Actuarial Journal, vol. 5, n°2, 41-53.

HESTON S.L. [1993] « A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options », The Review of Financial Studies

LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2e édition. Paris : Ellipses.

MANDELBROT B. [1962] « Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy ». Comptes rendus à l'Académie des sciences, vol. 254, 3968–3970.

Références bibliographiques

MANDELBROT B. [1963] « The variation of certain speculative prices ». Journal of business, vol. 36, 394–419.

MERTON R.C. [1976] « Option princing when underlying stock returns are discontinuous ». Journal of Financial Economics, vol. 3, 224-44

PLANCHET F., THEROND P.E. [2005] « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », Proceedings of the 15th AFIR Colloquium.

RAMEZANI C.A.; ZENG Y. [1998] « Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes: application to security prices ». Working paper.

REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*, third edition. Berlin: Springer Verlag.

SAPORTA G. [1990] *Probabilités, analyse des données et statistique*. Paris : Editions Technip.

WALTER C. [1994] *Les structures du hasard en économie : efficience des marchés, lois stables et processus fractals*. Thèse de doctorat, IEP Paris.

WALTER C. [2001] « Searching for scaling laws in distributional properties of price variations : a review over 40 years », Proceedings of the 11th AFIR Colloquium

WALTER C., BRIAN E. (Dir.) [2008] *Critique de la valeur fondamentale*, Paris : Springer

ZAJDENWEBER D. [2000] *Économie des extrêmes*, Paris : Flammarion

http://www.ressources-actuarielles.net

Contacts

Frédéric PLANCHET

fplanchet@winter-associes.fr

Pierre THEROND

ptherond@winter-associes.fr

WINTER & Associés

Bureau de Paris
43-46 avenue de la Grande Armée
F-75 116 Paris
+33-(0)1-45-72-63-00

Bureau de Lyon
18, avenue Félix Faure
F-69 007 Lyon
+33-(0)4-37-37-80-90

http://www.winter-associes.fr/
http://www.lesaaa.fr/
http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/